Kantonalno takmičenje iz fizike učenika srednjih škola
7.04.2021. Tuzla - ONLINE
Oblast: Mehanika i termodinamika

ZADACI sa rješenjima

1. Zadatak

Kamen bacimo brzinom $v_0 = 10m/s$ pod elevacionim uglom $\alpha = 40^0$. On pada na zemlju na udaljenosti X_D od početnog položaja. Sa koje visine h treba baciti kamen u horizontalnom pravcu da bi uz jednaku početnu brzinu pao na isto mjesto? Otpor zraka zanemariti.

Rješenje:
$v_0 = 10\frac{m}{s}$
$\alpha = 40^0$

---

h=?

Domet kosog hica:

$$X_D = v_{0x} t_k$$

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$

Vrijeme padanja (penjanja) kod kosog hica je:

$$t_p = \frac{v_{0y}}{g}$$

Ukupno vrijeme kretanja:

$$t_k = 2t_p$$

$$t_k = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

Uvrštavanjem relacija za v_{0x} i t_k, domet kosog hica je:

$$X_D = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Domet horizontalnog hica:

$$X_D = v_0 t$$

Vrijeme kretanja jednako je vremenu slobodnog pada tijela sa iste visine sa koje je izbačeno tijelo u horizontalnom pravcu:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$X_D = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Domet horizontalnog hica jednak je dometu kosog hica, na osnovu toga možemo doći do visine sa koje je izbačeno tijelo u horizontalnom pravcu:

$$v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{v_0 \sin 2\alpha}{g}$$

$$\frac{2h}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 2\alpha}{g^2}$$

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 2\alpha}{2g}$$

$$h = \frac{(10\frac{m}{s})^2(\sin 2 \cdot 40^o)^2}{2 \cdot 9,81\frac{m}{s^2}}$$

$$h = \frac{100\frac{m^2}{s^2} \cdot 0,9698}{19,62\frac{m}{s^2}}$$

$$h = 4,94m$$

2. Zadatak

Horizontalni disk se obrće oko vertikalne ose ugaonom brzinom ω_1, njegov moment inercije u odnosu na osu obrtanja je I_1. Na njega pada drugi disk, koji ima u odnosu na istu osu moment inercije I_2 i ugaonu brzinu ω_2. Površine diskova su paralelne, a njihovi centri su na istoj vertikalnoj liniji. Donja površina diska koji pada snabdjevena je uređajem koji se pripaja za gornju površinu donjeg diska, pričvršćujući diskove u jednu cjelinu (sistem).
a) Naći ugaonu brzinu ω dobivenog sistema.
b) Za koliko se promijeni ukupna kinetička energija oba diska poslije pada drugog diska?
Rješenje:

a) Moment impulsa prvog diska, prije pada drugog diska:

$$L_1 = I_1\omega_1$$

Moment impulsa drugog diska, prije njegovog pada:

$$L_2 = I_2\omega_2$$

Moment impulsa oba diska (sistema), poslije pada drugog diska:

$$L = (I_1 + I_2)\omega$$

Prema zakonu održanja momenta impulsa, zbir impulsa prvog i drugog diska prije pada drugog diska jednak je momentu impulsa sistema:

$$L_1 + L_2 = L$$

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega$$

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$$

b) Kinetička (rotaciona) energija prvog diska, prije pada:

$$E_{k_1} = \frac{I_1\omega_1^2}{2}$$

Kinetička (rotaciona) energija drugog diska, prije pada:

$$E_{k_2} = \frac{I_2\omega_2^2}{2}$$

Ukupna kinetička energija diskova prije pada jednaka je zbiru kinetičke energije prvog i drugog diska:

$$E_{k_0} = E_{k_1} + E_{k_2}$$

$$E_{k_0} = \frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2}$$

Ukupna kinetička energija sistema, poslije pada diska:

$$E_k = \frac{(I_1 + I_2)\omega^2}{2}$$

Uvrštavanjem izraza za ugaonu brzinu sistema, kinetička energija sistema je:

$$E_k = \frac{(I_1 + I_2)}{2} \cdot \frac{(I_1\omega_1 + I_2\omega_2)^2}{(I_1 + I_2)^2}$$

$$E_k = \frac{(I_1\omega_1 + I_2\omega_2)^2}{2(I_1 + I_2)}$$

$$E_k = \frac{I_1^2\omega_1^2 + 2I_1I_2\omega_1\omega_2 + I_2^2\omega_2^2}{2(I_1 + I_2)}$$

Promjena kinetičke energije, dio energije koji se utroši na spajanje diskova, jednaka je razlici ukupne kinetičke energije prije spajanja diskova i ukupne kinetičke energije poslije spajanja diskova:

$$\Delta E_k = E_{k_0} - E_k$$

$$\Delta E_k = \frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2} - \frac{I_1^2\omega_1^2 + 2I_1I_2\omega_1\omega_2 + I_2^2\omega_2^2}{2(I_1 + I_2)}$$

$$\Delta E_k = \frac{I_1\omega_1^2(I_1 + I_2) + I_2\omega_2^2(I_1 + I_2) - (I_1^2\omega_1^2 + 2I_1I_2\omega_1\omega_2 + I_2^2\omega_2^2)}{2(I_1 + I_2)}$$

$$\Delta E_k = \frac{I_1^2\omega_1^2 + I_1I_2\omega_1^2 + I_1I_2\omega_2^2 + I_2^2\omega_2^2 - I_1^2\omega_1^2 - 2I_1I_2\omega_1\omega_2 - I_2^2\omega_2^2}{2(I_1 + I_2)}$$

$$\Delta E_k = \frac{I_1I_2\omega_1^2 + I_1I_2\omega_2^2 - 2I_1I_2\omega_1\omega_2}{2(I_1 + I_2)}$$

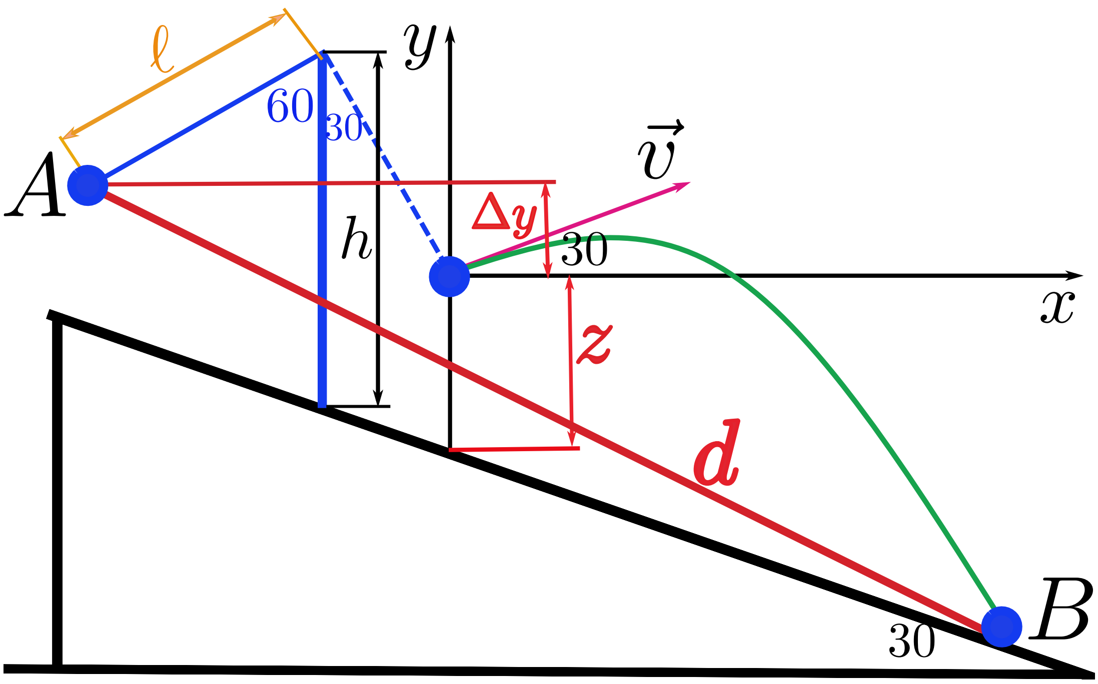
$$\Delta E_k = \frac{I_1I_2(\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 + \omega_2^2)}{2(I_1 + I_2)}$$

$$\Delta E_k = \frac{I_1I_2(\omega_1 - \omega_2)^2}{2(I_1 + I_2)}$$

3. Zadatak

Matematičko klatno je postavljeno na strmu ravan. Visina držača matematičkog klatna je $2m$, a dužina užeta je $1m$, zanemarljive mase. Za kraj užeta svezana je kuglica zanemarljivih dimenzija. Kuglica se izvede iz ravnotežnog položaja za ugao od 60^0 (smjer: uz strmu ravan) i tada se nalazi u položaju A. Kuglica se pusti i nakon što opiše ugao 90^0 uže se prekine i kuglica se nastavlja kretati slobodno te pada na strmu ravan u položaj B. Odrediti udaljenost između položaja A i položaja B. Ugao strme ravni je 30^0.

Rješenje:



Zakon očuvanja energije:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg\Delta y => v_0 = \sqrt{2g\Delta y}$$

$$\Delta y = l\cos 30 - l\cos 60 = \frac{l}{2}\Big(\sqrt{3} - 1\Big)$$

$$v_0 = \sqrt{gl(\sqrt{3} - 1)}$$

Koordinatni sistem je postavljen u tačku kada kuglica napušta klatno. Jednačine kretanja po x i y osi:

$$x = v_{0x}t = v_0\cos 30^0 \cdot t => t = \frac{x}{v_0\cos 30}$$

$$y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = v_0\sin 30^0 \cdot \frac{x}{v_0\cos 30^0} - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2 30} = x\tan 30 - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cdot \cos 30^0}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{gx^2}{2gl(\sqrt{3} - 1)}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\Big)^2$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2x^2}{3l(\sqrt{3} - 1)} \qquad (1)$$

Potrebno je odrediti pravac $y = kx + n$ koji prolazi kroz strmu ravan u nasem 2D koordinatnom sistemu. S obzirom da je dat nagib strme ravni odredit ćemo koeficijent pravca na sljedeći način. Ugao kojeg zaklapa x osa sa strmom ravni je $360^0 - 30^0 = 330^0$

$$k = \tan 330^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$n = -z = -(h - l\cos 30^0 + \frac{l}{2\sqrt{3}})$$

Pa je jednačina pravca:

$$y = -\frac{x}{\sqrt{3}} - (h - l\cos 30^0 + \frac{l}{2\sqrt{3}}) \qquad (2)$$

Izjednačavajući jednačine (1) i (2) dobit će se tačka gdje će kuglica pasti:

$$\frac{2x^2}{3l(\sqrt{3}-1)} - \frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{l}{\sqrt{3}} - H = 0$$

Pomnožimo sa $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{x^2}{l(3-\sqrt{3})} - x + \frac{l}{2} - \frac{\sqrt{3}H}{2} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(l-h\sqrt{3})}{2l(3-\sqrt{3})}}}{\frac{2}{(3-\sqrt{3})}} m$$

Uzet ćemo sa predznakom plus jer nas interesuje tačka na koju će pasti, a ne tačka sa koje bi tijelo bilo ispaljeno sa strme ravni.

$$x = 1.72m$$

zamjenom x u (2) ili (1)

$$y = -1.70m$$

Koordinate tačke B su (1.72m, -1.70), a tačke A su (-($l\sin 30^0 + l\sin 60^0$), Δy) , a to je (-1.36m, 0.366m)

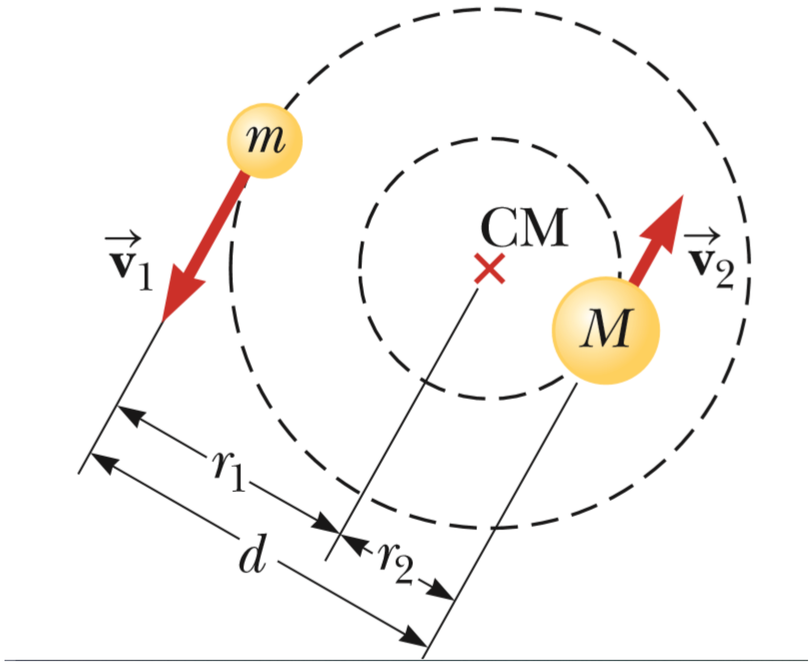
$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$
$$d = 3.71m$$

4. Zadatak

Dvije zvijezde masa M i m nalaze se na udaljenosti d (jedna od druge) i kruže oko zajedničkog centra mase. Pretpostaviti da su zvijezde izolovane od ostatka svemira. Pokazati da je period rotacije ovih zvijezda oko centra mase dat sa:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{\gamma(M+m)}$$

Rješenje:



Gravitaciona sila koja djeluje na svaku zvijezdu data je sa:

$$F_G = \frac{\gamma M m}{d^2}$$

Centripetalna sila tijela mase m je: $F_{cp} = m r_1 \omega^2$

Prema 2. Njutnovom zakonu:

$$\frac{\gamma M m}{d^2} = m r_1 \omega^2 \quad => \quad \omega^2 = \frac{\gamma M}{d^2 r_1}$$

Kako je:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad => \quad \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

Možemo zapisati:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\gamma M}{d^2 r_1} \quad (1)$$

Isto vrijedi i za drugu zvijezdu.

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\gamma m}{d^2 r_2} \quad (2)$$

Kombinacijom relacija (1) i (2), ili prosto znanjem o centru mase 2 tijela dolazimo do izraza:

$$M r_2 = m r_1$$

Kako je:

$$d = r_2 + r_1 \quad => \quad M(d - r_1) = m r_1$$

Slijedi da je

$$r_1 = \frac{Md}{M+m} \quad (3)$$

Vratimo (3) u (1) i dobijemo:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{\gamma(M+m)}{d^3} \quad (1)$$

Sredimo li prethodni izraz dobit ćemo željeni izraz:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{\gamma(M+m)}$$

5. Zadatak

Šuplja aluminijska kuglica vanjskog poluprečnika 1 cm, a unutrašnjeg 0.9 cm i gustine $\rho_{Al} = 2700\frac{kg}{m^3}$ udari u horizontalnu mirnu površinu vode. U trenutku udara vektor brzine je zaklapao ugao od 60^0 sa normalom na povšinu vode. Brzina kuglice pri ulazu u vodu iznosi $7\frac{m}{s}$. Izračunati udaljenost od tačke gdje je kuglica ušla u vodu do tačke gdje će kuglica izaći iz vode. Gustina vode je $\rho_v = 1000\frac{kg}{m^3}$. Zanemariti trenje i otpor pri udaru i kretanju kuglice kroz vodu.

Rješenje:

$r_2 = 1cm$

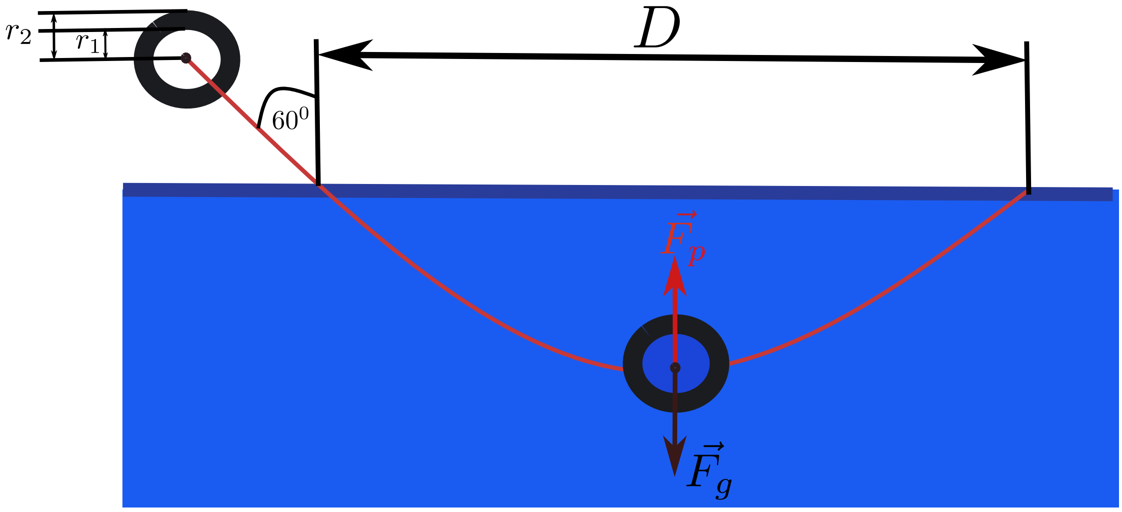
$r_1 = 0.9cm$

$\rho_{Al} = 2700\frac{kg}{m^3}$

$v_0 = 7\frac{m}{s}$

$\rho_v = 1000\frac{kg}{m^3}$

D=?



Masa kuglice je:

$$m = \rho_{Al} V = \rho_{Al}(V_2 - V_1) = \rho_{Al} = \frac{4\rho_{Al}\pi}{3}(r_2^3 - r_1^3)$$

$$m = 3.06 \cdot 10^{-3} kg$$

Prema drugom Newtonovom zakonu:

$$\vec{F}_p + \vec{F}_g = m\vec{a}$$

$$F_p - F_g = ma$$

$$\rho_v V g - mg = ma$$

$$a = \frac{\rho_v V g - mg}{m}$$

$$a = 12.4 \frac{m}{s^2}$$

Sada posmatramo situaciju kao kosi hitac. Domet kosog hica je:

$$D = v_{0x} t$$

$$D = v_0 \cdot \cos 30^o \cdot t \quad (1)$$

$$v_{0y} = at_{max}$$

$$v_0 \sin 30^o = at_{max}$$

$$t = 2t_{max} = 2\frac{v_0 \sin 30^o}{a}$$

$$t = 0.56s$$

Zamjenom u jednačinu (1)

$$D = 3.39m$$